Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 9.1

1. Betrachte das Anfangswertproblem:

$$y'(x) = y(x)cos(x)$$
$$y(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}$$

Mit Hilfe von 'Trennung der Variablen' erhält man

$$\ln|y| - 1 = \ln|y| - \ln(e) = \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{1}{v} dv = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(\tau) d\tau = \sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(x) - 1$$
$$\Leftrightarrow y = \exp(\sin(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Betrachte das Anfangswertproblem:

$$y'(x) = 3x^2 + 2y(x)$$
$$y(0) = \frac{1}{4}$$

Mit Hilfe von 'Variation der Konstanten' und zweimaliger 'partieller Integration' erhält man

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(2x)\big(\int_0^x \exp(-2v)3v^2 dv + \frac{1}{4}\big) \\ &= \exp(2x)\Big(\Big[-\frac{3}{2}\exp(-2v)(v^2 + v + \frac{1}{2})\Big|_0^x + \frac{1}{4}\Big) \\ &= \exp(2x)\big(-\frac{3}{2}\exp(-2x)(x^2 + x + \frac{1}{2}) + 1\big) \\ &= -\frac{3}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + \exp(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2

1. Betrachte das Anfangswertproblem:

$$y'(x) = \exp(-y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

Mit Hilfe von 'Trennung der Variablen' erhält man

$$\exp(y) - \exp(y_0) = \int_{y_0}^{y} \exp(v) dv = \int_{x_0}^{x} 1 d\tau = x - x_0$$
$$\Rightarrow y(x) = \ln(x - x_0 + \exp(y_0)) \quad \forall x \in (x_0 - \exp(y_0), \infty)$$

<u>Probe:</u>

$$y'(x) = \frac{1}{x - x_0 + \exp(y_0)} = \frac{1}{\exp(\ln(x - x_0 + \exp(y_0)))} = \exp(-\ln(x - x_0 + \exp(y_0))) = \exp(-y(x))$$

2. Betrachte das Anfangswertproblem:

$$y'(x) = \frac{1}{x + y(x)}$$
$$y(x_0) = y_0$$

Mit Hilfe der Transformation $u(x) := x + y(x)$ lässt sich die Anfangswertproblem in folgendes umwandeln:

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{u(x)}$$
$$u(x_0) = x_0 + y_0 =: u_0$$

Man erhält nun durch 'Trennung der Variablen' mit $u_0 + 1 > 0$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{1}{1 + \frac{1}{v}} dv = \int_{u_0}^{u} \frac{v}{v+1} dv = \int_{u_0}^{u} 1 - \frac{1}{v+1} dv = \int_{x_0}^{x} 1 d\tau$$
$$\Rightarrow u - \ln(|u+1|) = x - x_0 + u_0 - \ln(u_0 + 1)$$

und durch Resubstitution erhält man

$$y - \ln(|y + x + 1|) = -\ln(x_0 + y_0 + 1)) + y_0.$$

Probe:

$$0 = (y - \ln(y + x + 1))' = y' - \frac{1}{y + x + 1}(y' + 1) = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+x+1}(\frac{1}{x+y} + 1)$$

Aufgabe 9.3 Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Gegeben seien die Diffeomorphismen $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$, sowie das glatte Vektorfeld $X : U \to \mathbb{R}^n$.

Behauptung: $(X^\phi)^\psi = X^{\psi \circ \phi}$

Beweis. Für $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}
X^{\psi\circ\phi}(u) &= J_{\psi\circ\phi}\big((\psi\circ\phi)^{-1}(u)\big) \cdot X\big((\psi\circ\phi)^{-1}(u)\big) \\
&= J_{\psi\circ\phi}\big(\phi^{-1}\circ\psi^{-1}(u)\big) \cdot X\big(\phi^{-1}\circ\psi^{-1}(u)\big) \\
&= J_\psi\big(\psi^{-1}(u)\big) \cdot J_\phi\big(\phi^{-1}\circ\psi^{-1}(u)\big) \cdot X\big(\phi^{-1}\circ\psi^{-1}(u)\big) \\
&= J_\psi\big(\psi^{-1}(u)\big) \cdot X^\phi\big(\psi^{-1}(u)\big) \\
&= \big(X^\phi\big)^\psi(u)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 9.4 Seien $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y > 0 \right\}$, die Abbildung $\phi : U \to U; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$ ein Diffeomorphismus und $X : U \to \mathbb{R}^n; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ ein glattes Vektorfeld.

Es gilt $\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ und $J_\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

1. Berechnung von X^ϕ:

$$\begin{aligned} X^\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= J_\phi\Big(\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) \cdot X\Big(\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y}{x} & x \end{pmatrix} \cdot X\begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y}{x} & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{y^2}{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y + y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Zur Bestimmung der Integralkurven $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ von $X^\phi(x,y)^T$ mit $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ betrachte folgende Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} &x'(t) = x(t);\ x(t_0) = x_0 \\ &y'(t) = y(t) + y(t)^2;\ y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

Beide lassen sich mit Hilfe von 'Trennung der Variablen' lösen. Es gilt also für $\frac{y_0}{y_0+1} > 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(t - t_0) \cdot x_0 \\ y(t) &= \frac{\exp(t-t_0)\frac{y_0}{y_0+1}}{1 - \exp(t-t_0)\frac{y_0}{y_0+1}}, \qquad t > t_0 + \ln(\frac{y_0+1}{y_0}) \end{aligned}$$

Bemerkung: Zur Berechnung der zweiten Lösung muss man folgendes Integral lösen:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{v+v^2} dv = \int_{y_0}^{y} \frac{v - v + 1}{v(v+1)} dv = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} dv$$

3. Zur Bestimmung der Integralkurven von X mit Anfangswert $\Big(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{x_0} \end{pmatrix}\Big)$, muss man lediglich $\phi^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ berechnen.

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{y(t)}{x(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t-t_0) \cdot x_0 \\ \frac{1}{x_0} \frac{\frac{y_0}{y_0+1}}{1 - \exp(t-t_0)\frac{y_0}{y_0+1}} \end{pmatrix},\ x_0 > 0$$